ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 111

Α2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 104

Α3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 128

Α4. α) Λάθος β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$, $A_g=\mathbb{R}$ και $h(x)=\ln x$, $A_h=(0,+\infty)$.

Β1. Είναι $A_{g\circ h}=\{x\in A_h \mid h(x)\in A_g\}$ δηλαδή,

$$\begin{cases} x\in A_h \\ h(x)\in A_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ (\ln x)\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x>0$$

Άρα $A_f=A_{g\circ h}=(0,+\infty)$ και

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln^2 x}}{x}=\frac{4-x^2}{x},\ x>0$$

Β2. i) Για $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}=\frac{-(x^2+4)}{x^2}<0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

ii) Είναι $\pi>e\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\pi)<f(e)\Rightarrow \dfrac{4-\pi^2}{\pi}<\dfrac{4-e^2}{e}\overset{\pi(4-e^2)<0}{\Rightarrow}\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$

B3. Έχουμε $\lim\limits_{x\to o^+} f(x) = \lim\limits_{x\to o^+}\left(4-x^2\right)\cdot \lim\limits_{x\to o^+}\frac{1}{x} = +\infty$, άρα η ευθεία $\varepsilon_1 : x=0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0.$$

Άρα η $\varepsilon_2 : y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

και για κάθε x κοντά στο $+\infty$ είναι:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| = \frac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{\left|f(x)\right|} \le \frac{1}{\left|f(x)\right|}$$

δηλαδή $-\frac{1}{\left|f(x)\right|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \le \frac{1}{\left|f(x)\right|}$

και επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\left|f(x)\right|}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left|f(x)\right|} = 0$

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $\int_2^3 xf(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx=1\Rightarrow$

$\int_2^3 (1+ax)\,dx=1\Rightarrow\left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3=1\Rightarrow\left(3+\frac{9a}{2}\right)-(2+2a)=1$

$\Rightarrow 3+\frac{9a}{2}-2-2a=1\Rightarrow\frac{5a}{2}=0\Rightarrow a=0$

Οπότε έχω $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 \;, & x<1 \\ \frac{1}{x} \;, & x\geq 1\end{cases}$

Γ2. I).

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-2)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-1}{x}=-1$

Άρα f παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1)=-1$ οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x_o=1$.

ii) Η εξίσωση της (ε) είναι:

$\varepsilon:\quad y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$\varepsilon:\quad y-1=-1(x-1)$

$\varepsilon:\quad y=-x+2$

Έχω $\lambda_\varepsilon=-1\Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1\Rightarrow\omega=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Γ3.

Έχω $f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & , \; x<1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & , \; x\geq 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	-1	$-$
$f(x)$	↘		

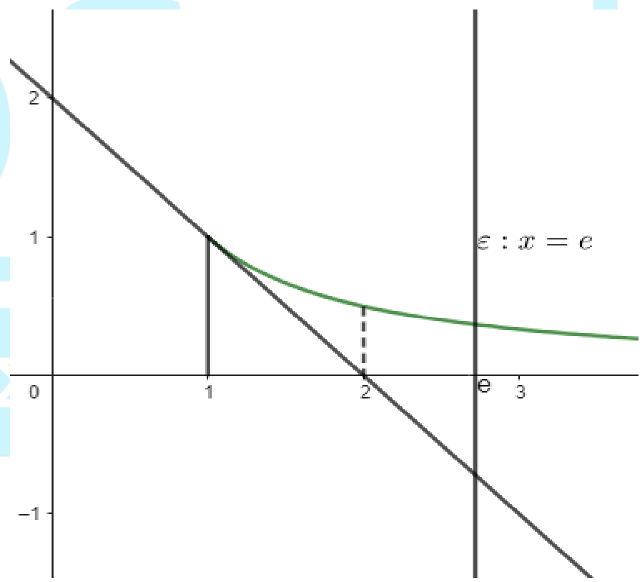
Είναι η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
οπότε η f είναι 1-1

και το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f((-\infty,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Γ4. Είναι



$$E(\Omega)=\int_1^2\left(f(x)-y_\varepsilon\right)dx+\int_2^e f(x)\,dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+[\ln x]_2^e$$

$$=(\ln 2+2-4)-\left(\ln 1+\frac{1}{2}-2\right)+\ln e-\ln 2$$

$$=(\ln 2-2)-\left(0+\frac{1}{2}-2\right)+1-\ln 2$$

$$=\ln 2-2-\frac{1}{2}+2+1-\ln 2=\frac{1}{2}\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}, x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=l$

Άρα $f(x)-2x=(x-1)g(x)\Rightarrow f(x)=(x-1)g(x)+2x$

και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)g(x)+\lim\limits_{x\to 1}2x=0\cdot l+2=2$

Δηλαδή

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k\right]=2\Rightarrow \ln 1-1+k=2\Rightarrow k=3$$

Οπότε $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3,\ A_f=(0,2)$

Δ2. Για κάθε $x\in(0,2)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{2-x}\cdot(-1)+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow x^2+x-2=0 \overset{x\in(0,2)}{\Rightarrow} x=1$

Η μονοτονία της συνάρτησης f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		2
x^2+x-2		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	
			ολ. μέγιστο		

Η f έχει ολικό μέγιστο για $x_0 = 1$, το $f(1) = 2$.

Για $x \in A_1 = (0,1]$ έχουμε $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f(x),\, f(1)\right] = (-\infty, 2]$

αφού $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \left[\ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3\right] = -\infty$

Το $0 \in f(A_1)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_1 \in (0,1)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, η $f(x) = 0$ θα έχει ακριβώς μια ρίζα $x_1 \in (0,1)$.

Για $x \in A_2 = (1,2)$ έχουμε $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x \to 2^-} f(x),\, f(1)\right) = (-\infty, 2)$ διότι

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \ln(2-x) + \lim_{x \to 2^-}\left(-\frac{1}{x} + 3\right) = \lim_{x \to 2^-} \ln u + \frac{5}{2} = -\infty$$

αφού $\lim\limits_{x \to 2^-} \ln(2-x) \underset{\substack{x \to 2^- \\ u \to 0^+}}{\overset{u=2-x}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln u = -\infty$

Το $0 \in f(A_2)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_2 \in (1,2)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2)$ θα έχει ακριβώς μια ρίζα $x_2 \in (1,2)$.

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι

$$x_1 < \frac{1}{3} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - 3 + 3 \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{2}.$$ που ισχύει,

αφού $\dfrac{5}{2} > 1 \Rightarrow \ln\dfrac{5}{2} > \ln 1 = 0$.

Δ3. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$

έτσι ώστε $\quad f'(\xi) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right] \subseteq (0,1)$, δηλαδή υπάρχει ένας τουλάχιστον

$\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Για $x \in (0,2)$ έχω:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} = -\left[\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x^3}\right] < 0$$

Δηλαδή η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,2)

Επειδή η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,2) έχω ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4. i) Αφού οι F, G είναι αρχικές συναρτήσεις της f στο $(0,2)$, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F(x) = G(x) + c,\ x \in (0,2) \quad (1)$.

Για $x = x_1$ η $(1) \Rightarrow F(x_1) = G(x_1) + c \Rightarrow G(x_1) = -c \quad (2)$

Για $x = x_2$ η $(2) \Rightarrow F(x_2) = G(x_2) + c \Rightarrow F(x_2) = c \quad (3)$

Άρα $(2)+(3) \Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$.

ii) Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x,\ x \in [x_1, x_2]$

Η φ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\varphi(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2$$

$$\varphi(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1$$

Για $x_1<x<1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x)\Rightarrow f(x)>0$ και

για $1\le x<x_2\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(x_2)\Rightarrow f(x)>0$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$

Είναι $F'(x)=G'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, άρα οι συναρτήσεις $F,\,G$ είναι γνησίως αύξουσες στο (x_1,x_2)

και για $x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}G(x_1)<G(x_2)=0\Rightarrow G(x_1)<0\\0=F(x_1)<F(x_2)\Rightarrow F(x_2)>0\end{cases}$

Άρα $\varphi(x_1)<0$ και $\varphi(x_2)>0$, οπότε $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)<0$, άρα από το Θεώρημα Bolzano η $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (x_1,x_2).

Επιπλέον

$$\varphi'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2\Rightarrow\varphi'(x)=x_1f(x)+x_2f(x)+2=$$
$$=(x_1+x_2)f(x)+2>0$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1,x_2), συνεπώς η $\varphi(x)=0$ θα έχει ακριβώς μια ρίζα στο (x_1,x_2).